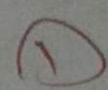
امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة أولى رياضيات – د. إضافية -2015 –2016



السؤال الأول (50د):

1) بما أنه المتحول منفصل فيجب أن يكون -5-:

$$\sum_{x=0}^{n} p(X=x)=1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} p(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}q^{n-x}=(p+q)^{n}=1^{n}=1$$

2) -10-:

$$EX=\sum_{x=0}^{n} x.p(X=x)=\sum_{x=0}^{n} x.\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}q^{n-x}=np\sum_{x=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}$$

لنفرض الآن أن:

$$n-x=n+1-(y+1)=m-y \Leftarrow \begin{vmatrix} n-1=m \\ x-1=y \end{vmatrix} \ldots\ldots(*)$$

$$\Rightarrow Ex=n.p \quad \sum_{y=0}^{m}\frac{m}{y!(m-1)}p^{y}.q^{m-y}=n.p(p+q)^{m}=n.p \;;\; p=1-q$$

كذلك و بنفس الطريقة فإننا نجد:

$$EX^{2}=\sum_{X=0}^{n} X\frac{n!}{x!(n-x)!}\; p^{x}q^{n-x}=n.p\sum_{x=1}^{n-1} x\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}\; p^{x-1}.q^{n-x}$$

و بتطبيق التحويلات $(*)$ ، نجد:

$$=n.p\sum_{y=0}^{m}(y+1).\frac{(m)!}{(y)!(m-y)!}\;p^{y}.q^{m-y}=n.p\left[\sum_{y=0}^{m}\frac{y.(m!)}{y!(m-y)!}p^{y}.q^{m-y}+\sum_{y=0}^{m}\frac{m!}{y!(m-Y)}p^{y}.q^{m-y}\right]$$

$$=n.p\left[m.p+(p+q)^{m}\right]=n.p\left[(n-1)p+1\right]=n^{2}p^{2}-n.p^{2}+n.p$$

$$\Rightarrow Vor\; X=EX^{2}-(EX)^{2}=\; n^{2}.p^{2}-np^{2}+n.p-n^{2}p^{2}=n.p.q$$

3) -10-:المتحول الثنائي أو الحداني وإذا كان $x=0,1$ ، فيصبح متحولاً برنولياً.

4) -10-:

$$U_{X}(t)=\sum_{x=0}^{n} e^{t.x}p(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(e^{t}p\right)^{x}q^{n-x}=(e^{t}p+q)^{n}.$$

$$U_{X}(t)=\sum_{x=0}^{n} e^{t.x}p(X=x)=\sum_{x=0}^{1}\left(e^{t}p\right)^{x}q^{1-x}=(e^{t}p+q)^{1}=e^{t}p+q.$$

5) تقدير الوسيط بالطريقتين-15-:

$$L=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\Rightarrow \log L=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log(1-p)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \log L}{\partial p}\right|_{p=\hat{p}}=0\Rightarrow \hat{p}=\overline{X}.$$

$$EX|_{p=\hat{p}}=\overline{X}\Rightarrow \hat{p}=\overline{X}.$$

الجواب الثاني (30د): 1) -15-لنحسب التكاملين التاليين:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \ ...... \ (*)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

حيث أن الدالة المستكملة زوجية وحدي التكامل متناظرين . الآن لنجري التحويل التالي :

$$y = \frac{t^2}{2} \Rightarrow dy = t\,dt = \sqrt{2}\, y^{\frac{1}{2}}\, dt \Rightarrow I_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} . e^{-y}\, dy = \sqrt{2} \int_{0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}}\, e^{-y}\, dy$$

$$I_1 = \sqrt{2} . \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

كذلك نجد بالنسبة للتكامل الثاني : $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 . \int_{0}^{\infty} t^2 . e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ، الآن نفرض :

$$y = \frac{t^2}{2} \Rightarrow dy = t\,dt = \sqrt{2}\, y^{\frac{1}{2}}\, dt \Rightarrow I_2 = 2\sqrt{2} . \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{1}{2}} . e^{-y} dy = 2\sqrt{2} . \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{2} . \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}.$$

بما أن الدالة موجبة لكونها أسية مضروبة بجذر تربيعي ، و كذلك بحسب التمرين (*) فإن :

نفرض الآن، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . dx = \frac{1}{\sigma . \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$:

$$dx = \sigma . dt \Leftarrow x = \sigma . t + \mu \Leftarrow t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . I_1 \ ; \ I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \overset{(*)}{=} \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2\pi} = 1.$$

2) -15-لنحسب توقع هذا المتحول :

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma . \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x . e^{-\left(\frac{x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right.} dx$$

نفرض الآن : $dx = \sigma . dt \Leftarrow x = \sigma . t + \mu \Leftarrow t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma . t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t . e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

